Universidad Tecnológica de la Mixteca

División de Estudios de Posgrado

Doctorado en Modelación Matemática

Examen de Admisión 2015

*Nombre del aspirante:*____

Elija por lo menos cinco problemas y tiene tres horas, a partir del momento que se le indique, para resolverlos correctamente.

1. Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ la función definida por $T(f) = xf + f'$. Probar que T es una trasformación lineal, encontrar una base para $N(T)$ y una base para $R(T)$, calcular la nulidad de T, el rango de T y verifica el teorema de la dimensión. Finalmente, determinar si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

2. Determinar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3, & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, si lo es, encontrar una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{si } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

   Hallar los puntos en los cuales la función f es diferenciable.

4. Sea (X, d) un espacio métrico y consideremos $(\mathbb{R}, d_u)$, donde d_u es la métrica usual en $\mathbb{R}$. Sean $A \subset X$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que:

   a) Si A es conexo y compacto, entonces $f(A)$ es un intervalo cerrado y acotado.

   b) Si A es conexo, entonces para cualesquiera $a, b \in A$ con $f(a) < f(b)$ y para cada $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < r < f(b)$, existe $c \in A$ tal que $f(c) = r$ (Teorema del Valor intermedio generalizado).

5. Resolver el problema con valores iniciales dado, en términos de $y(t)$, usando el método de transformadas de Laplace.

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = -4, y'(0) = 4, y''(0) = -2$$

6. Justificar que si $y = \phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ en el intervalo (a, b), donde p, q y g son dos veces diferenciables, entonces la cuarta derivada de $\phi(x)$ existe en (a, b).

EXAMEN DE ADMISIÓN 2014

*Nombre del aspirante:*____

Elija por lo menos cinco problemas y tiene tres horas, a partir del momento que se le indique, para resoverlos correctamente.

1. Determine dos soluciones diferentes del problema con condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

¿Por qué la existencia de soluciones diferentes no contradice al teorema de existencia y unicidad?

2. Resuelve el siguiente problema: Un cuerpo de masa $m = 2kg$, se lanza verticalmente en el aire con una velocidad inicial $v_0 = 3m/s$. El cuerpo encuentra una resistencia al aire proporcional a su velocidad. Hallar:

   (a) la ecuación del movimiento,

   (b) la velocidad en el tiempo $t = 20s$,

   (c) el tiempo necesario para que el cuerpo llegue a su altura máxima.

3. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determine si la matriz A es diagonalizable , y si A es diagonalizable, encuentre una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ es una matriz diagonal.

   (b) Encuentre la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' &= 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= -x_1 - x_2 + x_3 \end{aligned}$$

4. Determine si el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución, ¿es única?:
$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 = & 1 \\ 4x_1 & +x_2 & +8x_3 & -x_4 = & 0 \end{array}$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Verificar que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existen en cada punto de $\mathbb{R}^2$ y que f no es continua en $(0,0)$.

6. Sean $f : X \to Y$ una función entre espacios normados y $x_0 \in X$. Verificar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

   (a) La función f es continua en x_0.

   (b) Para cada vecindad V de $f(x_0)$, existe una vecindad U (que depende de V) de x_0 tal que si $x \in U$, entonces $f(x) \in V$.

   (c) Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $||x - x_0|| < \delta(\epsilon)$, entonces $||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$.

   (d) Para cada sucesión $\{x_n\}$ en X que converge a x_0, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$.