Notas

Metodología para la resolución de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden

Resumen

Se analiza las metodologías utilizadas para resolver una ecuación diferencial de primer y segundo grado, llegando a la conclusión de que tales métodos parten de uno solo. Asimismo señalamos la herramienta matemática necesaria para hallar la solución.

I Introducción

Este trabajo surge de mi experiencia como maestro del curso de ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería Química y dado que me ha tocado ver como los estudiantes cometen errores básicos cuando resuelven una ecuación diferencial de primer y segundo grado [1,2], ya que no visualizan que en general se trabajan 3 métodos de solución para la ecuación de primer orden y 3 para la de segundo orden[3] (ver figura 1 y 2).

Aquí damos tip's para visualizar mejor la solución de dicha ecuación de primer orden ya sean por separación de variables, del tipo homogéneo (método de sustitución), ecuaciones exactas y ecuaciones lineales (incluyendo la ecuación de Bernoulli). Para el caso de ecuaciones de segundo orden, tenemos a los métodos: elaboración de una segunda solución a partir de una solución conocida (formalmente hablando no es un método completo), ecuaciones con coeficientes constantes, el método de coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros.

II Metodología

Iniciamos revisando la definición de ecuación diferencial según Dennis Zill[1], la cual nos señala que:

- Una ecuación que contenga derivadas totales[1] de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes se le llama una *ecuación diferencial*.

Ecuaciones de primer orden

La herramienta matemática necesaria para resolver una ecuación de primer grado es: la factorización de expresiones algebraicas, las propiedades de los logaritmos naturales, y en forma mas especifica integración por partes.

Ahora bien, con esta definición se pueden señalar que los métodos usuales para la solución de una ecuación diferencial de primer grado homogénea son 3, dado que el método de *sustitución* (cuya forma son y=ux o x=vy) nos lleva al método de *separación de variables* (primer método). El *segundo* método es el caso de una ecuación exacta, centrándose en el criterio de la primera derivada parcial

$$\left(\frac{\partial M(X,Y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right)$$

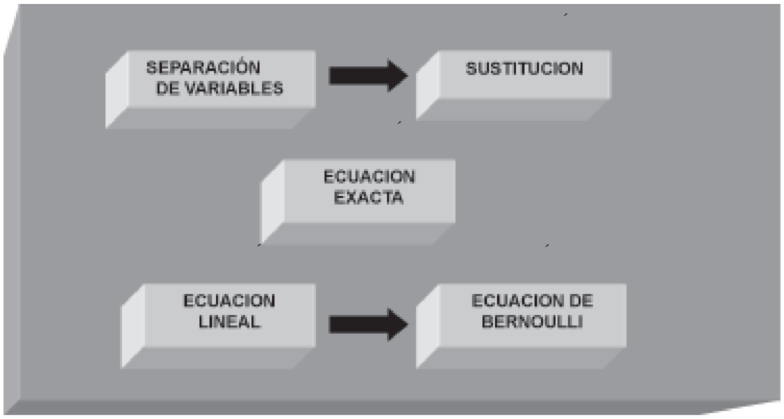
y el *tercer* método es una ecuación de lineal (basado en encontrar un factor integrante para así llevarla a la forma de una diferencial total[4]) que abarca a la ecuación de Bernoulli y donde dicha ecuación se transforma en lineal por el cambio de variable de la forma $w=y^{1-n}$.

Ecuaciones de segundo orden

Para la *ecuación de segundo grado*, también se trabajan prácticamente 3 métodos, siendo el *primero* la elaboración de una segunda solución a partir de una solución conocida, ésta se centra en el producto de una función nueva por la función conocida ($y=u(x)y_1(x)$) que introducida en la ecuación de segundo orden la *reduce a una ecuación de primer orden* para obtener una fórmula explicita y así obtener dicha segunda solución.

[1] Se recuerda que el caso de ecuaciones que contengan derivadas parciales no esta aquí considerado.

FIGURA 1. METODOLOGÍA PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN.



Para el caso de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con *coeficientes constantes,* se necesitan la metodología del álgebra básica sobre como resolver una ecuación cuadrática ($ax^2+bx+c=0$), para así con esto analizar los tres casos posibles de raíces en donde aparecen soluciones repetidas ($m_1=m_2$) y reales, distintas y reales ($m_1 \neq m_2$) y raíces complejas (m_1=á+âi y m_2=á-âi). Además aquí se proponen soluciones de la forma exponencial ($y=e^{mx}$).

Para el método de *coeficientes indeterminados* aplicado a ecuaciones diferenciales no-homogéneas ($Ay''+By'+C=g(x)$) se necesitan tres tipos de operadores diferenciales (derivadas) de la forma:

$$1)\ D^n$$

$$2)\ (D-\alpha)^n$$

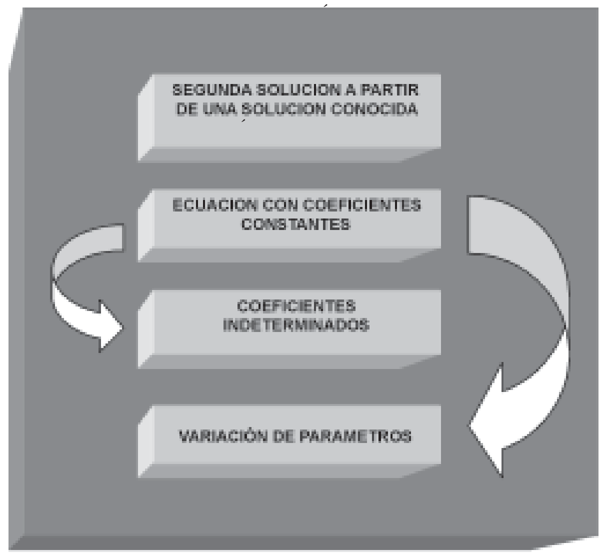
$$3)\ \left(D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)\right)^n$$

Esto se hace para anular a la parte no-homogénea (g(x)) de dicha ecuación diferencial y con esto tener la solución general $y=y_c+y_p$ (la y_c proveniente de resolver la ecuación homogénea asociada la no-homogénea en la forma arriba señalada (método de coeficientes constantes) y la y_p llamada solución particular proviene de encontrar un operador diferencial que anule a la función g(x) y de resolver un sistema de ecuaciones lineales).

Finalmente el método de *variación de parámetros* viene de proponer una solución particular de la forma $y_p=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$, y así con esto formar una sistema de ecuaciones lineales para ser resuelto por la regla de Cramer[5] resultando en dos formulas sencillas para así encontrar la solución y_p y cuya solución y_c se obtiene tambien del método de una ecuación con coeficientes constantes.

Las aplicaciones tanto de las ecuaciones de primer como de segundo orden se usan básicamente en el método de ecuaciones lineales (para problemas de crecimiento y decrecimiento de poblaciones, decaimiento radiactivo, mezclas químicas, circuitos eléctricos, y ley de enfriamiento de Newton) y el de coeficientes indeterminados, respectivamente (Movimiento armónico simple, vibratorio amortiguado y forzado).

FIGURA 2. METODOLOGÍA PARA LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN.



III Conclusión

De acuerdo con la metodología señalada arriba se concluye que para resolver una ecuación diferencial de primer grado en esencia se trabaja con el método de separación de variables y la ecuación lineal y para las ecuaciones de segundo grado se trabaja con el de coeficientes constantes para el caso homogéneo y el de coeficientes indeterminados para el caso no-homogéneo

Referencias

[1] DENNIS G. ZILL
(1988, 2002) *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda Edición y séptima edición por Thomson Learning.

[2] E. CHIGO ANOTA
(2003-2005) *Apuntes del Curso de ecuaciones diferenciales*

[3] Dicha conclusión va de acuerdo al programa del curso.

[4] Esto puede ser visto como la derivada de un producto AdB+BdA=d(AB).

[5] STANLEY I. GROSSMAN,
Álgebra Lineal, segunda edición, Grupo Editorial Iberoamérica (1988).

Ernesto Chigo Anota
Facultad de Ingeniería Química-Benemérita
Universidad Autónoma de Puebla
AV. San Claudio y 18 Sur, C. U., Puebla, Pue.