Acerca de la construcción de conocimientos matemáticos en las carreras de ingeniería mediante conocimientos computacionales

Resumen

En este trabajo se expone acerca de la posibilidad de construir nuevos conocimientos matemáticos o ampliar los existentes a partir de la introducción de la computación en las carreras de ingeniería. En particular se fundamenta la necesidad de construir el concepto abstracto de función con lo que se facilita la construcción de algoritmos y programas o el uso de asistentes matemáticos. Se ilustra además con la introducción de la Transformación de Hough y con nociones de simulación estadística.

Las ideas anteriores se defienden a partir del principio de trasladar el centro de atención de cada clase, de la erudición del profesor al proceso de aprendizaje del estudiante mediante la creación de un clima que propicie la colaboración y el intercambio. Interesa en el trabajo enfocar el curso de matemática en relación con la computación, no solamente desde la matemática hacia la computación sino también desde la computación hacia la matemática.

Introducción

En los últimos tiempos se debate mucho acerca de la conveniencia de trasladar el centro de atención de cada clase, de la erudición del profesor al proceso de aprendizaje del estudiante, principio éste que comparto. La clase es para debatir, discutir, orientar y analizar las diversas vías de solución de un problema, así como de las posibles generalizaciones y no para entregarle un conocimiento acabado al estudiante.

El aprendizaje es un proceso de construcción y reconstrucción de conocimientos, habilidades y valores. Los conocimientos adquiridos se utilizan para construir nuevos conocimientos, por lo que deben reflejar las relaciones principales e invariantes que expresan una esencia.

De vital importancia es la creación de un clima que propicie el vínculo entre lo cognitivo y lo afectivo, donde el estudiante pueda construir los conocimientos en un ambiente que propicie la comunicación, combinando de manera flexible lo que el profesor considera como conveniente y lo que el estudiante siente como interesante, de tal forma que se logre un desarrollo en su pensamiento teórico y creador teniéndose en cuenta las necesidades, intereses, objetivos y aspiraciones de los estudiantes, por lo que el profesor como experto, es un orientador, un guía, un facilitador del proceso de aprendizaje.

El estudiante deberá comprender que no solamente puede llegar a conocer a través de otros sino también por sí mismo; observando, experimentando y combinando los razonamientos, respetándose la individualidad y evitándose la estandarización de la enseñanza. Deberá pasarse del aprendizaje reproductivo al creativo, no imponiendo nuestra propia lógica de razonamiento sino apoyándonos en el razonamiento del colectivo.

" La orientación no se reduce a la base orientadora de la acción, ella se va construyendo con un significado y sentido personal para el estudiante sobre la base de la tarea y su base orientadora de la acción, su percepción sensorial, sus aprendizajes significativos anteriores, y muy unido a ellos: sus experiencias, vivencias, intereses, afectos, emociones, valores, motivos y necesidades, su fantasía, intuición, imaginación y creatividad, su identidad, estilo cognitivo, hábitos y modos de pensar y actuar" (1).

La introducción de la computación en los cursos de matemáticas para las carreras de ingeniería, constituye sin lugar a dudas el principal cambio de paradigma experimentado por la enseñanza de esta ciencia en los últimos años. Poco a poco se fueron venciendo las reticencias y obstáculos de aquellos docentes aferrados a un tradicionalismo caduco y el uso de medios de cómputo en los cursos de matemáticas ha servido ya no solamente para resolver problemas que por otras vías serían muy costosos, difíciles o simplemente imposibles de resolver, sino también para lograr comprender con mayor eficiencia, conceptos y métodos generales de trabajo propios de esta ciencia que a través de las técnicas tradicionales de enseñanza no siempre resultaban de fácil comprensión por la amplia masa de estudiantes. La confección de algoritmos y programas en los casos que así se justifique o el uso de asistentes matemáticos o de otros sistemas con fines demostrativos, resulta algo habitual en cualquier curso de matemática para carreras de ingeniería al que se le impregnen signos de ineluctable modernidad. Las enormes posibilidades que brindan las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones, con el ahorro de tiempo y recursos que representan, es una línea de trabajo que bien utilizada puede elevar sin lugar a dudas, la eficiencia y calidad del proceso de enseñanza de la matemática.

Es bueno aclarar que no todo requiere computadoras en un curso de matemáticas. La discusión heurística, el debate, el intercambio fuera de protocolo entre los estudiantes con la dirección del profesor, no lo sustituye ningún sistema computarizado para cumplimentar muchos objetivos propios del curso de matemática; por lo que el lápiz y el papel continúan siendo fieles y necesarios aliados del estudiante. De lo que se trata, al organizar el curso es, atendiendo a los objetivos, definir dónde y cómo utilizar técnicas de cómputo y donde no hacerlo. En este sentido resulta válido hacer la siguiente observación:

El teorema central del límite de la Teoría de Probabilidades expresa que la suma de n variables aleatorias independientes tiende a la ley normal para n grande. La demostración rigurosa de este teorema generalmente no se hace en los cursos de matemáticas para las carreras de ingeniería. Basta tomar varias variables aleatorias con ley uniforme y comprobar que la suma va tomando forma “acampanada” para ilustrar este teorema en esos cursos. Aunque es posible simular este fenómeno en una computadora, esta no nos permite “tocar con las manos este teorema” es decir “verlo en una situación concreta”.

Una vía para enriquecer la clase donde se aborde el teorema central del límite puede ser mostrarle a trasluz a los estudiantes una regla plástica de 50 centímetros con varios años de uso. Los golpes, las caídas y deformaciones recibidas por la regla durante varios años se expresan mediante variables aleatorias que al actuar de manera conjunta con el paso del tiempo dejan su huella en la regla precisamente “siguiendo la ley normal”. El reflejo de soslayo de la luz en la regla, nos permite ver además que la esperanza matemática se sitúa aproximadamente en los 25 centímetros como nos exigiría el teorema central del límite. Se trata como ya dije de “poder palpar” un concepto, un principio cuya demostración rigurosa requiere un tratamiento matemático avanzado. Puede lograrse además sin necesidad de computadoras.

Teniendo en cuenta que el concepto de función es uno de los principales conceptos de toda la matemática, en este trabajo se expone como pueden materializarse las ideas anteriores a través de la ampliación progresiva de este concepto en los cursos de matemáticas para las carreras de ingeniería. Se demuestra lo útil que resulta llegar al concepto abstracto de función, es decir a la correspondencia que se establece entre dos conjuntos A y B de naturaleza arbitraria de tal forma que a cada elemento del conjunto A se le hace corresponder un único elemento del conjunto B. Si bien estas ideas parecían estar reservadas para los estudiosos de la llamada matemática pura, ahora deberán formar parte de la cultura matemática en la ingeniería sobre todo si se quieren aprovechar mejor las potencialidades que ofrece la computación tanto mediante la confección de algoritmos y programas como mediante el uso de asistentes matemáticos. No se trata de comenzar por definir en una clase el concepto abstracto de función y utilizarlo en toda su riqueza, sino en ir aproximándonos a él a través de las diversas situaciones problemáticas.

Por otra parte, resulta habitual impregnar a los cursos de matemáticas para ingenieros los siguientes enfoques: enfoque analítico en variables reales, complejas o vectoriales; enfoque de optimización; enfoques probabilísticos o estadísticos; enfoque de operadores o transformaciones y de equivalencias o isomorfismos etc. Aunque al enfoque numérico o aproximado también se le dedica atención, no siempre se logra un elevado desarrollo del pensamiento algorítmico de los estudiantes. En el trabajo se exponen también teniendo en cuenta las ideas anteriores, algunas reflexiones que pueden enriquecer este tipo de pensamiento, tan necesario en la ingeniería, y sin embargo no del todo desarrollado, teniendo en cuenta las potencialidades que ofrece el curso de matemática, si muchas ideas, apoyadas en interpretaciones geométricas y físicas o en nociones intuitivas, se combinan con los conocimientos que en materia computacional ya poseen los estudiantes.

Construcción del concepto abstracto de función

Resulta natural utilizar en los cursos de matemáticas para ingenieros, funciones con dominio e imagen en subconjuntos de números reales o complejos, para lo cual generalmente se comienza con funciones de R en R o de R^2 en R y progresivamente se trabaja con funciones de R^n en R^m. Estos espacios vectoriales son suficientes para introducir los conceptos de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad con los cuales se cubren las principales aplicaciones de la matemática en la ingeniería. La introducción de la computación con el uso de superlenguajes o de asistentes matemáticos constituyen exigencias para la ampliación progresiva del concepto de función. No se trata de imponer en una clase este concepto en un plano eminentemente teórico, sino en preparar al estudiante para que comprenda que no son sólo de interés para él las funciones con dominio e imagen en R^n. Esto puede lograrse desde las primeras clases de una forma muy sencilla si se vincula con problemas que el estudiante debe abordar, como son la búsqueda de una raíz en un intervalo o la búsqueda de un extremo. Para ilustrar con el método de bisección lo antes expuesto considérese el conjunto siguiente:

$F = \{ f : [a,b] \to R$ continuas, crecientes o decrecientes y tales que $f(a)f(b) < 0 \}$

Como consecuencia del teorema de Bolzano existe una única raíz para cada elemento de F. La forma en que se programa el algoritmo del método de bisección en lenguaje C, como se expresa a continuación, puede resultar más comprensible si se asocia con la siguiente función que llamaremos Raíz:

Sean:

$A = F \times [a,b) \times (a,b] \times R^+$

$B = (a,b) \cup (F \times [a,b) \times (a,b] \times R^+)$

$\text{Raíz} : A \longrightarrow B$

$$(f,p,q,eps) \to \begin{cases} (p+q)/2 \text{ si } f((p+q)/2) = 0 \text{ ó } q - p < eps \\ (f, (p+q)/2, q, eps) \text{ si } f((p+q)/2)\, f(q) < 0 \\ (f, p, (p+q)/2, eps) \text{ si } f(p)\, f((p+q)/2) < 0 \end{cases}$$

Esta idea encierra un método general de trabajo aplicable en la programación de otros algoritmos. Nótese que la función Raíz así definida, tiene por dominio e imagen dos conjuntos de naturaleza abstracta, pero aquí lo aparentemente muy abstracto tiene un valor muy concreto. Resulta esencial discutir estas ideas con los estudiantes para que comprendan la necesidad de la ampliación del concepto de función. Compárese lo anterior con el programa de la función Raíz en lenguaje C que se describe a continuación:

```
double raíz(f,a,b,eps)
double f(), a, b, eps;
{
double m;
m = (a+b)/2;
if(f(m)= = 0 || b-a<eps)
return(m);
else if (f(a)*f(m)<0)
return(raíz(f, a, m, eps));
else
return (raíz(f, m, b, eps));
 }
```

Este programa expresa el proceso iterativo que comienza con el intervalo inicial [a,b] y progresivamente se pasa a los intervalos [a,m] ó [m,b] siendo $m=(a+b)/2$ en dependencia de si la raíz cae en el subintervalo [a,m] ó en [m,b].

Si la solución de este mismo problema se realiza mediante un asistente matemático, por ejemplo mediante el DERIVE, basta teclear las siguientes líneas de código como puede comprobarse en [2]:

```
f(x):=
g(a,b):=if(f(a)f((a+b)/2)<0, [a,(a+b)/2], [(a+b)/2,b])
Bisección(a,b,n):=ITERATE(g(element(v,1),
element(v,2)),v,[a,b],n)
Error:=(a,b,n):=(b-a)/2^n
```

Si consideramos I como el conjunto de todos los subintervalos cerrados de un intervalo cerrado inicial [a,b] donde está definida f como elemento de F, entonces las expresiones anteriores son funciones con dominio e imagen en los conjuntos siguientes:

$g: I \to I$

$g([a,b]) = [a,(a+b)/2]$ si $f(a)f((a+b)/2)<0$

$g([a,b]) = [(a+b)/2,b]$ en otros casos

$\text{bisección}: I \times N \to I$

Esta función actúa de la manera siguiente: a cada elemento de I y para cada número natural n, se obtiene otro elemento de I a partir de iterar n veces la función g, operación que realiza la función ITERATE que tiene implementado el asistente matemático DERIVE.

error: I ´ N ® R

Esta función devuelve el número real (b-a)/2^n que representa el error en la estimación de la raíz.

Como se observa de este ejemplo, de una forma natural se ha ampliado el concepto de función a conjuntos con dominio e imagen de naturaleza un tanto diferente a lo que habitualmente el estudiante conoce.

De manera similar puede realizarse con otros métodos numéricos cuyos principios pueden introducirse también desde las primeras clases como el método de Newton para el cálculo de una raíz, o el método de Euler para la solución aproximada de una ecuación diferencial. Más adelante nos referiremos a la transformación de Hough como ejemplo interesante de aplicación con dominio e imagen de naturaleza diferente.

Nociones sobre simulación estadística

Aunque los cursos de Teoría de Probabilidades y de Estadística Matemática se ofrecen generalmente cuando concluyen los cursos de Análisis Matemático y de Algebra, la posibilidad que brindan los lenguajes de programación de generar números pseudoaleatorios con ley uniforme en el intervalo [0,1], facilita la solución de tareas sencillas que desarrollan el pensamiento algorítmico a partir de nociones elementales sobre la simulación estadística. Algunos ejemplos pueden ser los siguientes:

1- Cálculo aproximado de una integral definida.

En este caso, conjuntamente con los métodos de cálculo aproximado de integrales definidas mediante rectángulos, trapecios y parábolas, puede evaluarse por ejemplo la integral de Poisson con el siguiente programa escrito en forma de pseudolenguaje :

```
input n ;
m = 0 ;
for (i = 1 ; n)                {
x = rnd(1) ;  /significa generar x en el intervalo [0,1]/
y = rnd(2) ; /significa generar y en el intervalo [0,1] /
if (y £ exp(-x* x))
m + + ; }
print m/n ;
```

Cálculos similares pueden hacerse con integrales múltiples. Para esos casos, las técnicas de simulación resultan más ventajosas que los métodos basados en fórmulas de cuadraturas. Un ejercicio interesante consiste en obtener aproximaciones del número p utilizando esta idea a partir de la comparación entre el área de un círculo de radio 1 inscrito en un cuadrado de lado 2 y el área del cuadrado. Resulta muy provechoso realizar discusiones de este tipo con los estudiantes.

2- Búsqueda del mínimo de una función f (x).

En este caso, conjuntamente con los métodos aproximados de búsqueda de extremos del tipo del gradiente, se puede introducir el siguiente programa escrito en forma de pseudolenguaje :

```
input n, z ;
m = 0 ;
while (m < n)
{
x = rnd (1) ; /significa generar x en el dominio de la función /
if (f (x) < f (z))
z = x, m = 0 ;
else
m + + ;
}
print z, f(z) ;
```

El valor práctico de este algoritmo, está dado en que permite buscar extremos de funciones que no cumplen las condiciones de continuidad y de diferenciabilidad clásicas o que no son unimodales, cuestión esta que aparece muchas veces en la práctica. Resulta de interés comparar este algoritmo en cuanto a tiempo de procesamiento y memoria con los algoritmos del tipo del gradiente. Estas ideas permiten la construcción de nuevos conocimientos por los estudiantes y el enriquecimiento de la formación básica en matemáticas, a partir de conocimientos elementales de computación, ya que basta conocer en algún lenguaje de programación, la sintaxis para la entrada y salida de datos y el uso de los ciclos “if”, “for” y “while”. Además, de esta forma, se prepara el terreno para la comprensión ulterior de los fenómenos aleatorios a través del curso de Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática.

Acerca de la Transformación de Hough

En el campo del reconocimiento de patrones de forma es muy conocida la Transformación de Hough, cuyas ideas básicas fueron patentadas por este autor en 1962. Ver [3] y [4]. Nos referiremos a ella porque también nos permite ampliar el concepto de función y nos brinda una aplicación sencilla de valor práctico para la ecuación normal de una recta, ideas que pueden utilizarse en los cursos de Geometría Analítica. Es otra manera de ver como el curso de matemática para la ingeniería puede enriquecerse desde la computación. De forma breve se exponen a continuación las ideas básicas asociadas con esta transformación.

La ecuación normal de una recta puede expresarse como r=xcosq + ysenq. Tomando q en el intervalo [0,p), a cada recta en el plano x-y se le hace corresponder por la ecuación anterior, un único par de valores q-r en el conjunto (0,p)´(-¥,+¥). La ecuación r=0 representa una recta que pasa por el origen y q=0 representa una recta paralela al eje y. Nótese que un punto fijo (x_i,y_i) en el plano x-y por la ecuación anterior se convierte en r= $x_i$cosq + $y_i$senq, esta ecuación analizada como curva en el plano q-r, cosa que puede hacerse ya que x_i e y_i están fijos representa una curva sinusoidal.

Por otra parte, si en el plano q-r fijamos un punto (q_i,r_i) entonces la ecuación r_i = xcosq_i + ysenq_i representa una recta en el plano x-y. Es decir la transformación de Hough cumple las siguientes propiedades:

1- Un punto en el plano x-y se corresponde con una curva sinusoidal en el plano q-r.

2- Un punto fijado en el plano q-r se corresponde con una recta en el plano x-y.

3- Puntos situados en la misma recta r_0 = xcosq_0 + ysenq_0 corresponden a diferentes curvas sinusoidales pero todas con la condición de que se intersectan en (q_0,r_0).

4- Puntos situados en la misma sinusoidal r = $x_0$cosq + $y_0$senq corresponden a diferentes rectas pero todas pasando por el mismo punto (x_0,y_0). Las condiciones 1 y 2 representan ampliaciones del concepto de función ya que en 1 El dominio es R^2 y la imagen es la familia de curvas sinusoidales, mientras que en 2 el dominio es el conjunto [0, p)´(-¥,¥) y la imagen es la familia de rectas.

A continuación utilizaremos la condición 3 para la búsqueda de rectas en una imagen, para lo cual formaremos un “acumulador bidimensional” de la manera siguiente: dividimos el intervalo [0,p) en d_1 partes iguales y el intervalo [-R,R] en d_2 partes iguales. Para cada punto (x_i,y_i) de la imagen mediante la ecuación r = x_i cosq + y_i senq encontramos hasta d_2 valores diferentes de r correspondientes a d_1 valores diferentes de q. Los valores de q y de r en el acumulador se obtienen con cierto margen de error prefijado de antemano. El siguiente cuadro recoge un acumulador de 709 puntos:

ρ\θ	0^0	20^0	40^0	60^0	80^0	100^0	120^0	140^0	160^0
1	4		5			9		12	7
2	80	3	20		2	65	1		7
3				6		1	3		8
4			72		42	4		45	
5		19					1		12
6		11			93		9	8	
7			46	8					79
8				9			18		

El significado de este cuadro es el siguiente: 72 puntos están sobre la recta de ecuación 4 = xcos$40^{0'}$ + ysen40^0, ningún punto sobre la recta de ecuación 3 = xcos20^0 + ysen20^0, un punto sobre la recta de ecuación.

5 = xcos120^0 + ysen120^0 etc. Si se considera un umbral de 60 entonces hay 5 rectas en la imagen y si el umbral es de 40 entonces hay 8 rectas en la imagen. Esta idea sencilla pero ingeniosa puede desarrollarse en un curso de matemática como aplicación no habitual pero valiosa. Solamente he pretendido dar la idea elemental, ya que existen muy buenos algoritmos para la transformación de Hough que reducen la memoria necesaria y aceleran los cálculos.

Conclusiones

En este trabajo se ha abordado la tarea de construir nuevos conocimientos matemáticos a partir de los conocimientos computacionales de los estudiantes, sin recurrir a excesos de retórica o a construcciones artificiosas y sobre el principio de que la clase tiene un valor formativo muy grande si se aprovecha como encuentro de debate, de análisis y de reflexión.

La introducción de la computación en el curso de matemática no sólo debe verse como vía para facilitar cálculos engorrosos o como medio demostrativo que facilita una mejor comprensión de los conceptos; sino también como herramienta que permite construir nuevos conocimientos o ampliar los existentes.

Se ha tratado de ilustrar, principalmente, con el concepto de función por el papel y lugar que desempeña en toda la matemática. Sirvan estas ideas para enriquecer la formación de nuestros estudiantes no sólo en el plano cognitivo sino también en el afectivo a partir de la creación de un clima que propicie la comunicación y el intercambio. Lo expuesto en el trabajo nos permite asegurar que el curso de matemáticas para ingenieros en relación con la computación, no sólo debe verse desde la matemática hacia la computación sino también desde la computación hacia la matemática. He querido poner de relieve que lo que entendemos por «formación básica en matemáticas» para las carreras de ingeniería es un principio ajeno a todo estatismo; está en constante adaptación a las nuevas tendencias de aplicación de la matemática a las Ciencias Técnicas.

Bibliografía

1- "Un Proyecto para el Desarrollo de la Personalidad". Selección de artículos. Grupo de Asesoramiento Pedagógico. Instituto Técnico Militar José Martí. Ciudad de la Habana 1997.

2- Pérez Carreras Pedro. " Matemática Asistida por Ordenador" Universidad Politécnica de Valencia 1996.

3- Hough P.V.C. "Methods and means for recognizing complex patterns U.S. Patent 3069654 (Dic. 18 1962).

4- Duda R. O. and P. E. Hart "Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures" Comm. ACM, 15 11-15 (January 1972).

5- Schildt Herbert «Programación en Turbo C» Mc GRALL- HILL/ Interamericana de México 1989.

Lic. Luis Manuel Alonso Aguila
Dr. C Matemáticas y Profesor Titular
Departamento de Matemática General
Facultad de Ingeniería Industrial
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría"
ISPJAE Ciudad de la Habana Cuba
lalons@ind.ispjae.edu.cu