Ensayos

La enseñanza de las Aplicaciones

de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias vía el software computacional

Resumen

En un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) por lo general se incluyen aplicaciones de las mismas en contextos como Economía, Física, Química entre otros para motivar el interés del estudiante y se plantea como parte de su experiencia formativa para su futura actividad profesional, enfrentarse a problemas en un contexto de aplicación (contextualizados). Uno de los objetivos del presente escrito es describir un experimento de enseñanza, bajo un enfoque de aprendizaje que se explicará mas adelante, con básicamente las siguientes componentes: especial énfasis en la formulación e interpretación de las EDO ya que para científicos e ingenieros son por lo menos tan importantes como las técnicas y la teoría matemática utilizadas, una componente adicional es el uso de software por parte del estudiante. La implementación de la propuesta constó de una primera fase de diseño de actividades y de una fase posterior de puesta en práctica en el salón de clases. En los siguientes párrafos se muestran algunos resultados de una primera experiencia realizada en la Universidad Tecnológica de la Mixteca.

Abstract

The Ordinary Differential Equations (ODE) course normally includes its applications in contexts like Economy, Physics, Chemistry among others in order to motivate the student, and it is done so that future professionals will have experience in facing problems in contextualized appli-cations. One of the objectives of this study is to describe a teaching experiment, with a learning focus which will be explained later, which basically contains the following parts: special emphasis on the formulation and interpretation of the ODE, since for scientists and engineers these are at least as important as the techniques and mathematical theory being used. A further component is the use of software by the student. The first stage of the implementation of this proposal was the design of activities and a later stage in which they were put into practice in the classroom. The following article shows some of the results of the first experience carried out in the Technological University of the Mixteca.

Abstrait

Lors d'un cours d'équations différentielles ordinaires (EDO), on inclut généralement leurs applications dans d'autres contextes tels que l'économie, la physique et la chimie, entre autres, pour motiver l'intérêt de l'étudiant, et on introduit la confrontation à certains problèmes d'un contexte d'application comme partie intégrante de son expérience formative de sa vie professionnelle future. Un des objectifs du présent document est de décrire une expérience d'enseignement d'un point de vue d'apprentissage que j'expliquerai plus en avant, mais principalement avec les éléments de base suivant: une emphase spéciale sur la formulation et interprétation des EDO qui sont, du moins pour les scientifiques et les ingénieurs, aussi importantes que les techniques et la théorie mathématique utilisées; l'utilisation d'un logiciel de la part de l'étudiant est un élément additionnel. L'élargissement de la proposition compte une première phase de design des activités et d'une phase postérieure de mise en pratique en classe. Les paragraphes suivants montrent les résultats d'une première expérience réalisée à l'Université Technologique de la Mixtèque.

TEMAS DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA vol. 4 número 12 septiembre-diciembre 2000 pp 21 - 26

Nahína Dehesa De Gyves*

Introducción

El acceso cada vez más generalizado a computadoras con software poderoso y amigable para el usuario, ha generado posibilidades de transformar la enseñanza de asignaturas en las cuales se requiere de capacidades de cálculo numérico, manipulación simbólica y presentación gráfica de la información, tal es el caso de programas computacionales como Mathematica, Maple y Matlab entre otros. Dicho uso se puede implementar en materias que requieren fuertemente de las matemáticas como el estudio de sistemas dinámicos, previsto en los cursos de EDO. Para ello se ha seleccionado el programa de modelación 20-sim.

El contexto de aplicación que se presentará en las siguientes líneas es el de Dinámica de Poblaciones de una especie con el Modelo de crecimiento de Malthus. Matemáticamente este modelo en su versión continua no presenta mayor dificultad; se describe con una ecuación diferencial lineal de primer orden y su solución puede lograrse por el método de separación de variables.

La tesis principal que sustenta este trabajo es que existen dos campos de acción en las que se da el aprendizaje, uno es el de las intuiciones y recursos propios del estudiante cuya forma de expresión puede ser realizada mediante las palabras del lenguaje cotidiano y otro es el de la formalización en que se desarrolla la teoría matemática cuyo lenguaje generalmente simbólico requiere básicamente de reglas de áreas como álgebra y análisis, es ésta perspectiva simbólica algebraica la que se favorece en un curso tradicional de EDO.

Desde un punto de vista educativo no se liga el conocimiento formal con el intuitivo; respondiendo a esta necesidad existen posturas teóricas, la que aquí se sostiene, que favorecen la construcción de significados con base al uso de diferentes representaciones (numérica, simbólica y gráfica) como herramientas para el aprendizaje de conceptos matemáticos.

En el modelo de Malthus sí se parte de representaciones menos abstractas como tablas o gráficas donde se registran poblaciones específicas a diferentes tiempos con la intención de formular una expresión simbólica para que una vez llegada a ella podamos utilizar la teoría matemática para resolverla, la interpretación del nuevo resultado matemático al contexto

* *ndehesa@mail.cinvestav.mx*
Depto. de Matemática Educativa
CINVESTAV-ZACATENCO
Ave. Inst. Politécnico Nacional 2508
07360 México, D.F., México.

de Dinámica de Poblaciones se facilitará puesto que se ha manejado de manera explícita la relación de las variables con su significado en el contexto.

La propuesta involucra el uso de diferentes representaciones y contempla la observación de las ideas que surjan del estudiante.

Materiales y métodos

El curso contempla dos tipos de materiales escritos dirigidos al estudiante en la que se relacionan las ideas expuestas anteriormente, una llamada Notas en la prevalece el lenguaje simbólico y se explican los fundamentos de los modelos y otra llamada Laboratorios los cuales son hojas de trabajo que pretende interaccionar con las intuiciones del estudiante y en la que se manejan otros tipos de representaciones no necesariamente simbólicas. Veamos algunos de estos materiales utilizados:

Laboratorio 1: El Modelo discreto

Crecimiento lineal y no lineal

Consideremos cierta ciudad con una población en un momento dado de un millón de habitantes. Después de 1 año, la población habrá crecido a 1.1 millones. Después de 2 años será de 1.21 millones de habitantes. En los siguientes años la población aumenta como lo indica la siguiente tabla:

Tiempo (años)	Población (millones de hab.)
0	1
1	1.1
2	1.21
3	1.33
4	1.46
5	1.60

1. La diferencia entre dos observaciones que da cuenta del número de habitantes al término de dos años consecutivos, ¿es la misma?
2. El cociente entre dos observaciones consecutivas es casi la misma. Compruébalo.
3. Si a la "población actual" la representamos por $N(n+1)$ y a la "población anterior" por $N(n)$ y suponiendo su cociente constante. Expresa la "población actual" en términos de la "población anterior":

A la anterior ecuación se le conoce como Modelo discreto de Malthus.

4. Utiliza 20-sim y grafica tiempo vs. Población, ¿se ajusta a una recta o a una función en particular?, ¿Qué ecuación la describe?
5. ¿En que porcentaje aumento la población al término del primer año?
6. ¿Ese porcentaje se conserva al paso de los primeros años?

El objetivo del laboratorio es formular la expresión analítica $N(n+1) = a\, N(n)$ con a una constante, la cual es una ecuación en diferencias de primer orden y es un buen ejemplo de una relación de recurrencia. La idea de graficar la población con respecto al tiempo es que sí se tratara de una recta entonces se podría estimar como primera aproximación a la solución del modelo una expresión lineal.

Ahora modificamos el problema proporcionando la *tasa de variación*:

Laboratorio 2: Un problema similar

La población del planeta al inicio de 1976 era de 4 mil millones y ha crecido a una tasa de 2% anual.

1. ¿Cuál fue la población en el año 1977?
2. Utiliza el mismo método para calcular las poblaciones de dos años posteriores :

(años)	(mil millones de hab.)
1976	4
1977	
1978	
1979	

3. Si utilizas el mismo procedimiento del Laboratorio anterior para la tabla, ¿Se ajusta el modelo de Malthus?
4. Relaciona la tasa q = 0.02 (2% anual) con la constante del modelo de Malthus:
5. Comprueba ese modelo en 20-sim.

6. Encuentra una expresión que describa la población para cualquier año en términos de la población inicial, para ello utiliza las Notas:
7. Con 20-sim, ¿Cuál será la población en el año 2010, suponiendo que la tasa de crecimiento no se modifica?

Reproducimos la parte de las Notas que aclaran los puntos 1 y 6.

Sea N_o la población en el tiempo t=0 y q la tasa de crecimiento por unidad de tiempo. La población al primer año es:

$$N(1) = N_o + q\,N_o \qquad (1)$$

Factorizando: $N(1) = N_o\,(1+q)$

Si calculamos la población al término del segundo año:

$$N(2) = N(1) + qN(1) = N(1)(1+q)$$

Sustituyendo el valor de $N(1)$:

$$N(2) = [\,N_o\,(1+q)](1+q)$$

o $\quad N(2) = N_o\,(1+q)^2$

así $\quad N(3) = N_o\,(1+q)^3$

$$N(4) = N_o\,(1+q)^4$$

generalizando: $N(k) = N_o\,(1+q)^k \qquad (2)$

con k entera y positiva.

Efectivamente la ec. (1): $N(1) = N_o + q\,N_o$ que reagrupado de otra forma

$$[N(1) - N_o\,] / N_o = q$$

$$[N(t+\mathrm{D}t) - N(t)] / \mathrm{D}t\,N(t) = q$$

se define como la *tasa de crecimiento por individuo* constante. Por otra parte la ecuación (2) es conocida como la solución al Modelo de Malthus, en la que claramente se observa que el tipo de crecimiento es exponencial y no lineal como se pudo haber visto en el laboratorio 1. También es posible enfatizar que aunque 20-sim hace los cálculos de forma inmediata para el año 2010, existen límites no tomados en cuenta en la formulación del modelo, uno de ellos son las limitaciones de recursos con los que se alimenta la especie que provoca que el crecimiento no sea tan acelerado. Un modelo más real que toma en cuenta estas limitaciones es la ecuación Logística.

Antes de abordar el Laboratorio 3 se le invita al lector a contestar o recordar la siguiente pregunta:

Dada una tasa del 2% anual ¿Cuál será una tasa mensual? de tal forma que al año se tenga el mismo crecimiento que el obtenido a una tasa anual.

Esta pregunta fue parte del Laboratorio 3, la respuesta inmediata por parte de los estudiantes fue "hay que utilizar la regla de tres": "si en 12 meses se utiliza una tasa del 2% entonces en 1 mes se utiliza una tasa de (2%)/12". Se les cuestionó si ello no supondría una relación lineal entre la tasa q_s y el lapso $s=1/12$ ($q_s = q{*}s$ con q la tasa anual). Se vio la necesidad de prestar especial énfasis en el desarrollo de la teoría matemática de Notas en torno a la obtención de dicha tasa.

Se puede calcular la densidad en r/s (r veces un s-ésimo de u.de t.):

$$N(r/s) = N_o\,(1+q_s)^r \qquad (3)$$

utilizando (1), para calcular la población al primer año:

$$N(1) = N_o\,(1+q)$$

utilizando (2): $\quad N(s/s) = N_o\,(1+q_s)^s$

pero $\quad N(s/s) = N(1)$

por transitividad $\quad N_o\,(1+q) = N_o\,(1+q_s)^s$

de donde $\quad (1+q) = (1+q_s)^s$

y $\quad 1+q_s = (1+q)^{1/s}$

por lo que : $\quad q_s = (1+q)^{1/s} - 1 \qquad (4)$

que es la tasa buscada.

Se hizo énfasis en que no había tal relación lineal y se les presentó el siguiente Laboratorio:

Laboratorio 3: Modelo Discreto con lapsos de fracciones de un entero

La población del planeta al inicio de 1976 era de 4 mil millones y ha crecido a un 2% anual.

¿Cuál es una tasa de crecimiento bimestral para calcular el número de habitantes a partir de 1976 ?

Y como respuesta permaneció la tendencia a contestar la misma respuesta, hay que utilizar la "regla de tres". Se les recordó la clase anterior y se les indujo a utilizar la ecuación (4).

Ante esta experiencia se intenta refinar el laboratorio utilizando casos particulares de la ecuación (4) de la siguiente forma:

La población del planeta al inicio de 1976 era de 4 mil millones y ha crecido a un 2% anual.

Utiliza el modelo $N(k) = N_o (1+q)^k$

1. Al año, la población N(1) = 4.08 mil millones, si queremos obtener una tasa de crecimiento semestral q_{s1} para calcular el número de habitantes a partir de 1976, debe satisfacer: $4.08 = (1+q_{s1})^2\, 4$, es decir, la población al año es la misma que la obtenida con la tasa anual. Despejar q_{s1} ¿Coincide con el supuesto de la "regla de tres"?
2. ¿Cuál es una tasa de crecimiento cuatrimestral q_{s2} para calcular el número de habitantes?
3. ¿Cuál es una tasa de crecimiento trimestral q_{s3} ?
4. Verifica que la tasa en el lapso supuesto obedece a $q_s = (1+q)^{1/s} - 1$, (ver Notas).
5. Utiliza 20-sim para tabular las poblaciones semestral, cuatrimestral y trimestralmente; ¿se modifican las poblaciones para un mismo año ?

Tiempo	Pob	Tiempo	Pob	Tiempo	Pob
1976		1976		1976	
1977		1977		1977	
1978		1978		1978	
1979		1979		1979	
1980		1980		1980	
1981		1981		1981	
1982		1982		1982	
1983		1983		1983	

6. Si se utilizan intervalos de tiempo cada vez menores comprobar que el modelo discreto tiende al modelo continuo $P_c = 4e^{0.019\,t}$.¿Porqué?, justificar con base en las Notas.

En los siguientes laboratorios se prosigue en formular el modelo continuo cuya ecuación es de la forma:

$$dN/dt = c\,N \quad (\text{con } c \text{ constante}) \qquad (5)$$

y su solución se relaciona con la obtenida por el modelo discreto del anterior laboratorio.

Discusión y análisis de resultados

La puesta en práctica de los Laboratorios fue realizada con alumnos que cuentan con destreza en los métodos de resolución de por lo menos los tipos de EDO lineales de primer y segundo grado así como de ciertos sistemas de ecuaciones lineales[1], dicho sea de paso se sabe que la función exponencial es básica en la resolución de por lo menos los tipos de EDO antes mencionados y una pregunta a reflexionar es sobre la suficiencia de utilizar a la función exponencial exclusivamente en su representación simbólica.

Formular un modelo implica otro tipo de problema para el estudiante que sobrepasa la manipulación de reglas algebraicas. Por ejemplo, dada una colonia de bacterias donde no se ejerce ningún control sobre ella, una manera de formular el modelo continuo (5) es a partir de la información de ser "la tasa de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presentes"; independientemente de lo difícil que pueda ser experimentalmente observar dicha información[2], la formulación requiere de por lo menos representar simbólicamente un tipo de variación ya utilizado, el de variación proporcional. Si no se hace explícito dicho tipo de variación se corre el riesgo de hacer asociaciones entre "discurso" y "ecuación". El hacer este tipo de asociaciones puede ser provechoso, siempre y cuando se cuenten con recursos para confrontar a la memoria. Un ejemplo que muestra el porqué de la desconfianza en la memoria es el Laboratorio 3 en el que prevaleció la idea de identificarlo como un tipo de problema que requería de resolverlo con la "regla de tres". El motivo por la que el estudiante sacó esa conclusión muy probablemente se deba al hecho de identificar la "forma" de la pregunta sin contar con otro tipo de representaciones que validaran dicha conclusión.

Alternativas para llegar a formulaciones matemáticas pueden ser el uso de representaciones más ligadas al sentido común como lo son tablas, gráficas y cálculos numéricos y permitir la interacción entre ellas puede contribuir a ampliar el repertorio de recursos con los que cuente el estudiante. Ante la necesidad de realizar cálculos sistemáticos para la obtención de datos en tablas o gráficas se justifica el uso del software.

20-sim permitió como entrada en los anteriores Laboratorios los parámetros de población inicial y la constante del modelo de Malthus a partir de los cuales calcula numerosas poblaciones a tiempos posteriores graficándolas en el plano. Así el estudiante tiene posibilidad de concentrarse en la obtención de dichos parámetros y con la información obtenida por el paquete pudo validar suposiciones realizadas (por ejemplo ver la obtención de la constante del modelo de Malthus del Laboratorio 2).

Conclusión

Se considera que explorar las matemáticas implicadas en situaciones problema con la mediación de software, como el de la obtención del Modelo de Malthus vía 20-sim, proporciona al estudiante un medio de expresión que le facilita hacer explícitas sus intuiciones matemáticas, le obliga a pensar con precisión acerca de los problemas y le facilita modificar sus concepciones erróneas usando la realimentación que proporciona la computadora, le permite examinar una variedad de casos, tal vez conduciendo a inducir patrones.

El Modelo de Malthus puede permitir diferenciar los tipos de crecimiento exponencial y lineal[3] desde una perspectiva no únicamente simbólica sino numérica, grafica y discursiva. Adicionalmente, puede ser el escenario donde se exploren otros conceptos como el de modelo discreto, modelo continuo, tasa de crecimiento, relación de recurrencia, porcentaje, función lineal, regla de tres, variación proporcional, límite, derivada, por mencionar algunos.

Sin embargo, ahondar en los supuestos realizados en la formulación del Modelo, también puede ser visto como un riesgo de repetir conceptos "ya vistos". En la propuesta se promueve que precisamente esta revisión permite identificar el grado de comprensión que tienen los estudiantes en esos conceptos. La importancia de dicha comprensión reside en su utilización en una variedad numerosa de contextos, los crecimientos lineal y exponencial son conceptos básicos que requieren su comprensión para su empleo en contextos extra algebraicos, como lo muestran los Laboratorios.

De la misma forma entender el concepto "tasa de crecimiento", confrontando las versiones discreta y continua del Modelo de Malthus, es hacer explícitas un mayor número de posibilidades del concepto lo que implicaría, bajo el enfoque de aprendizaje ya expuesto, tener mayores recursos para utilizarlo en contextos posteriores.

Una posibilidad a explorar en estudios posteriores es la interacción de acercamientos cualitativos como el campo de pendientes en sistemas dinámicos cuya solución puede tornarse imposible por medios analíticos, estas herramientas pueden ser expuestas a los estudiantes en forma intuitiva. Muchos avances recientes que constituyen la revolución no-lineal en la ciencia pueden ser expuestos en un primer acercamiento, de esta forma

Referencias

ARYA J., LARDNER R.

1992 Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía. Prentice Hall Hispanoamericana. México.

GUTIÉRREZ, S. , SÁNCHEZ F.,

1998 Matemáticas para las Ciencias Naturales. Sociedad Matemática Mexicana.

Haberman, R.

1977 Mathematical Models. *Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow*. Prentice Hall, New Jersey.