

Un sistema de correlación pluricanal para detectar señales en presencia de ruidos donde ambos tienen espectros idénticos

Arkhipov Mikhail Alexandrovitch*

Resumen

La presente investigación es un sistema de correlación pluricanal para detectar señales en presencia de ruidos. Consideremos el caso en el cual las señales de información y ruidos tienen los espectros idénticos de banda ancha, además el caso en que cada antena receptora contiene N elementos receptores y la distancia entre los centros de fase de las antenas es tal que la correlación de ruidos se encuentra ausente. Hemos obtenido las expresiones para calcular el valor medio de la función de correlación de la salida de las antenas para señales de información y para la varianza de la función de crosscorrelación de la salida de un integrador, también para la probabilidad de la detección P_d de una fuente de señal por la función de crosscorrelación de la salida del sistema receptor. Asimismo consideramos un caso particular de espectro de banda ancha, por lo que representamos las gráficas de la función de correlación y las características probabilísticas de la detección de dicho sistema receptor.

Los sistemas de correlación han sido investigados detalladamente para el caso de sistemas clásicos, es decir, aquellos en los que están contenidos dos elementos receptores y donde es necesario recibir las señales en caso de presencia de ruidos (V. bibliografía 1, 2). Un método para aumentar la efectividad y las distancias de funcionamiento de los sistemas de correlación es el uso de antenas con directividad, que tienen tamaños prolongados y que contienen un conjunto de elementos receptores.

La función crosscorrelación de la salida de un sistema de correlación receptor pluricanal

Consideremos ahora un sistema de correlación pluricanal que contiene dos antenas receptoras lineales y dis-

Abstract

In this paper we consider a multichannel correlation system for detecting signals in the presence of noise. We look at the case in which the information signals and noise have identical wide-band spectrums, each receiving antenna contains N receptor elements, and the distance between the antenna phase centers is such that the correlation of noises is absent. We introduce expressions to calculate the average value of the antenna output crosscorrelation function and the crosscorrelation function variance at the output of the integrator. With these, we can calculate the probability P_d of signal detection from the crosscorrelation function at the integrator output. We consider a specific wide-band spectrum signal example, for which we present graphs of the correlation function and the probabilistic detection characteristics of the system.

cretas. Supongamos que cada antena contiene N elementos receptores y que también el sistema de correlación contiene dos sumadores lineales para señales, un línea de retención, un multiplicador y un integrador. También hemos de considerar el caso de detección de una fuente de la señal en presencia de ruidos distribuidos en el espacio y cuando los espectros de la fuente y de los ruidos de ambiente son idénticos y tienen la banda ancha.

Las señales en entradas de elementos receptores de cada antena se determinan por las expresiones:

$$x(t) = x^s(t) + x^n(t),$$

donde $x^s(t)$ -la señal de la fuente en las entradas de elementos receptores de cada antena; $x^n(t)$ -la señal del ruido en las entradas de los elementos receptores de cada antena.

* Profesor-investigador de tiempo completo de la UTM.

Supongamos que $x^s(t)$ y $x^n(t)$ son procesos aleatorios y estadísticamente independientes y que $x^s(t)$ y $x^n(t)$ tienen las características de procesos gaussianos.

Determinaremos el valor medio y la varianza de fluctuaciones de la función de crosscorrelación en salida de un correlador.

Las señales de las salidas de antenas receptores AR_i y AR_{ii} se determinarán por medio de las siguientes expresiones:

$$u_i(t) = \sum_{i=1}^N p_i x_i(t), \quad (1)$$

$$u_{ii}(t) = \sum_{j=1}^N p_j x_j(t), \quad (2)$$

donde p_i y p_j son los coeficientes de transferencia de canales i y j de antenas receptoras AR_i y AR_{ii} .

Denotemos las señales en salidas de antenas receptoras como:

$$u_i(t) = p_i x_i(t) \quad \text{y} \quad u_{ii}(t) = p_j x_j(t). \quad (3)$$

La función de crosscorrelación en salida del sistema se determinará por la expresión:

$$\langle u_i(t) u_{ii}(t+\tau) \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle u_i(t) u_j(t+\tau) \rangle, \quad (4)$$

donde $\langle \rangle$ significa el promedio estadístico.

En el caso de descorrelación de ruido para cualquier pareja de elementos receptores de las antenas AR_i y AR_{ii} , y también de independencia de la fuente de la señal y ruidos, la expresión para la función de crosscorrelación deberá tener la siguiente forma:

$$K_{12}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle u_i(t) u_j(t+\tau) \rangle dt = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}^s(t) = B_s N^2 s_s^2 R_{12}^s(t), \quad (5)$$

donde

$$B_s = \frac{1}{s_s^2 N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}^s(0) \quad \frac{1}{2} D = 0$$

$$s_s^2 N^2 \quad (6)$$

B_s - coeficiente de transferencia de la señal por la antena;
 s_s^2 - la varianza de la señal de salida de un canal receptor de la antena;

$R_{12}^s(t)$ - la función de crosscorrelación normalizada de las señales;

D - distancia entre los centros geométricos de las antenas receptoras;

T - tiempo de integración.

La varianza de fluctuaciones de la función de crosscorrelación de la salida de un integrador

La varianza de las fluctuaciones de la función de crosscorrelación de la salida de un integrador se determina por medio de la expresión (V. bibliografía 1):

$$s_T^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [\langle u_i(t_1) u_{ii}(t_1+\tau) u_i(t_2) u_{ii}(t_2+\tau) \rangle - K_{12}^2(t)] dt_1 dt_2. \quad (7)$$

Consideremos la primera parte de la expresión entre paréntesis. Ahora escribamos el momento de orden cuatro como una suma de tres productos de momentos de orden dos considerando la expresión (4):

$$\langle u_i(t_1) u_{ii}(t_1+\tau) u_i(t_2) u_{ii}(t_2+\tau) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [u_i^s(t_1) + u_i^n(t_1)] [u_j^s(t_1 + t) + u_j^n(t_1 + t)] > \\
& \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N [u_l^s(t_2) + u_l^n(t_2)] [u_m^s(t_2 + t) + u_m^n(t_2 + t)] > + \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N [u_i^s(t_1) + u_i^n(t_1)] [u_l^s(t_2) + u_l^n(t_2)] > \\
& \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N [u_j^s(t_1 + t) + u_j^n(t_1 + t)] [u_m^s(t_2 + t) + u_m^n(t_2 + t)] > + \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N [u_i^s(t_1) + u_i^n(t_1)] [u_m^s(t_2 + t) + u_m^n(t_2 + t)] > \\
& \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N [u_l^s(t_2) + u_l^n(t_2)] [u_j^s(t_1 + t) + u_j^n(t_1 + t)] >. \quad (8)
\end{aligned}$$

Designemos los componentes de la suma como S_1 , S_2 , S_3 y la resta $t_2 - t_1 = n$. Escribamos aparte S_1 , S_2 , S_3 considerando que las señales y los ruidos son no correlacionados:

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}^s(t) \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N K_{lm}^s(t) = [K_{12}^s(t)]^2, \quad (9)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N K_{il}^s(n) + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N K_{il}^n(n)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N K_{jm}^s(n) + \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N K_{jm}^n(n), \quad (10)$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N K_{im}^s(n+t) \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N K_{jl}^s(t-n). \quad (11)$$

Escribamos S_2 y S_3 en otra forma al tomar en cuenta que:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N K_{il}^s(n) = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N K_{jm}^s(n) = B_s N^2 S_s^{-2} R_{11}^s(n), \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N K_{il}^n(n) = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N K_{jm}^n(n) = B_n N^2 S_n^{-2} R_{11}^n(n), \quad (13)$$

donde

- $R_{11}^s(n)$, $R_{11}^n(n)$ son las funciones de autocorrelación de la señal y de los ruidos de salida de la antena;

- B_n es el coeficiente de transferencia de ruidos por la antena;

- S_n^{-2} - la varianza de ruido de salida de un canal receptor de la antena.

Al substituir las expresiones (12) y (13) en (10) y (11) tendremos:

$$S_2 = N^4 [B_s S_s^{-2} R_{11}^s(n) + B_n S_n^{-2} R_{11}^n(n)]^2, \quad (14)$$

$$S_3 = N^4 B_s^{-2} S_s^{-4} [R_{12}^s(n+t) \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N R_{12}^s(t-n)]. \quad (15)$$

Al substituir las expresiones (9), (14), (15) de S_1 , S_2 , S_3 en la expresión (8) obtendremos:

$$\begin{aligned}
\langle u_i(t_1) u_{il}(t_1 + t) u_l(t_2) u_{il}(t_2 + t) \rangle = & [K_{12}^s(t)]^2 + \\
& + N^4 \{ [B_s S_s^{-2} R_{11}^s(n) + B_n S_n^{-2} R_{11}^n(n)]^2 + \\
& + B_s^{-2} S_s^{-4} R_{12}^s(n+t) \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N R_{12}^s(t-n) \}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Si consideramos que los espectros de señales y ruidos son idénticos, podremos introducir la notación:

$$R_{11}^s(n) = R_{11}^n(n) = R(n). \quad (17)$$

Al tomar en cuenta (17) y al considerar el caso de la fuente puntual substituiremos (16) en (7) y obtendremos:

$$\begin{aligned}
S_T^{-2} = & \frac{2N^4}{T} \int_0^T (1 - \eta/T) \{ R^2(n) [B_s S_s^{-2} + B_n S_n^{-2}]^2 + \\
& + B_s^{-2} S_s^{-4} R(n+t) \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N R(t-n) \} dn. \quad (18)
\end{aligned}$$

Cuando $t=0$ y $T \gg t_c$ (t_c - el intervalo de correlación del proceso) la expresión (18) podrá escribirse de la siguiente forma:

$$s_T^2 = \frac{2N^4}{T} \int_0^T [(B_s s_s^2 + B_n s_n^2)^2 + B_s^2 s_s^4] \delta R^2(n) dn \quad (19)$$

$$= \frac{2N^4}{T} \int_0^T (2 s_s^4 B_s^2 + 2 s_s^2 s_n^2 B_s B_n + s_n^4 B_n^2) \delta R^2(n) dn$$

donde $t_{c \text{ cuad}}$ - el intervalo cuadrado de correlación.

La relación señal a ruido en la salida del integrador Q será determinada por la proporción de $K_{12}(t)$ a s_T :

$$Q = \frac{B_s s_s^2 R_{12}(t) T^{1/2}}{[2 t_{c \text{ cuad}} (2 s_s^4 B_s^2 + 2 s_s^2 s_n^2 B_s B_n + s_n^4 B_n^2)]^{1/2}} \quad (20)$$

Al introducir la relación señal a ruido de la entrada de la antena: $q = s_s / s_n$, y al substituir q en la expresión (20) tenemos:

$$Q = \frac{B_s q^2 R_{12}(t) T^{1/2}}{[2 t_{c \text{ cuad}} (2 q^4 B_s^2 + 2 q^2 B_s B_n + B_n^2)]^{1/2}} \quad (21)$$

En el caso de que el campo de ruido sea multicomponente, el coeficiente de transferencia de ruido por la antena B_n se determinará por la expresión:

$$B_n = (s_{n1}^2 / s_n^2) B_{n1} + (s_{n2}^2 / s_n^2) B_{n2} + \dots \quad (22)$$

donde: $B_{n1}, B_{n2}, \dots$ - los coeficientes de transferencia de las componentes del campo de ruido por la antena;

$s_{n1}^2, s_{n2}^2, \dots$ - las varianzas de las componentes del campo de ruido de salida de un canal receptor de la antena;

s_n^2 - la varianza de suma de todas las componentes del campo de ruido de salida de un canal receptor de la antena.

La probabilidad de detección de una fuente puntual de la señal ruido por el máximo de la función de crosscorrelación

El problema de la detección de una fuente puntual en el caso de la presencia de ruidos se refiere al problema de la verificación de la hipótesis simple contra la alternativa simple. Para algunas aplicaciones es necesario detectar una fuente en un campo de ruido y la situación típica en la aplicación se presenta a partir de las siguientes condiciones:

- cuando existe ausencia de la información requerida sobre el valor de tomar una decisión equivocada y
- cuando existe ausencia de las probabilidades de estados que determinan las probabilidades de presencia o ausencia de la fuente.

En estos casos la regla de elección de una definición sobre el criterio de Neyman-Pearson da la probabilidad mínima de omisión de la fuente de la señal (la probabilidad mínima de falsa supresión) con la condición de que la probabilidad de alarma falsa no sea mayor que un valor fijo (V. bibliografía 3,4).

En el caso de que la probabilidad de falsa alarma P_o esté determinada es posible determinar el umbral a para las señales de salida de un integrador por medio de la expresión:

$$\int_a^\infty p_n(y) dy = P_o \quad (22)$$

donde $p_n(y)$ es la función de densidad probabilística de las fluctuaciones de la salida del integrador.

En caso de que las fluctuaciones de la salida del integrador tengan una distribución gaussiana, podremos escribir la expresión (22) de la siguiente forma:

$$0.5 - F(a/s) = P_0 \quad (23)$$

$$\text{donde } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt,$$

$F(x)$ - el integral de la densidad de probabilidad;

s^2 - la varianza de fluctuaciones de la salida del integrador.

Por medio de la ecuación (23) podremos encontrar el umbral a . La probabilidad de detección P_1 de una fuente de la señal por el máximo de la función de crosscorrelación de salida del sistema receptor para el valor de umbral calculado podrá determinarse por medio de la expresión:

$$P_1 = 0.5 + F\left(\frac{K_{12}(t) - a}{s_T}\right). \quad (24)$$

Al introducir la notación $q_0 = a/s_T$ tenemos la expresión final para la probabilidad de detección de la fuente P_1 :

$$P_1 = 0.5 + F(K_{12}(t)/s_T - q_0) = 0.5 + F(Q - q_0), \quad (25)$$

donde Q se determina por medio de la expresión (21).

Ahora bien, investiguemos la expresión (25) teniendo en cuenta que Q se determina por medio de la expresión (21). La probabilidad de alarma falsa P_0 por regla tiene los valores de 10^{-3} ($q_0 = 3.09$) o 10^{-5} ($q_0 = 4.26$). El valor de Q es función de un conjunto de variables: $Q = Q[R_{12}^s(t), q, B_s, B_n, T, t_{c \text{ cuad}}]$.

Podremos considerar la expresión (21) como una función de la variable q y del conjunto de parámetros: $R_{12}^s(t), B_s, B_n, T, t_{c \text{ cuad}}$.

Si consideramos el caso cuando los espectros de las señales y los ruidos son idénticos, la relación señal a ruido q de entrada de la antena se podrá determinar como la relación del nivel de señal con el cálculo de la distancia a nivel de ruido en una frecuencia estándar (por ejemplo 1 kHz) en banda 1 Hz. Por eso podremos determinar las

condiciones de funcionamiento del sistema por medio de nivel de señal y ruidos, y por medio de la distancia para fuente.

La función de autocorrelación de las señales $R_{12}^s(t)$, en caso de una fuente puntual, tendrá valor de 1 o casi 1.

En el caso cuando el sistema tenga directividad y la dirección de compensación de las antenas coincida con la dirección por la fuente de la señal el valor de B_s tomará valor de 1 o casi 1.

El valor B_n se establece por la distribución de los componentes del campo de ruido en el espacio y por la directividad de las antenas. Realmente el valor de B_n determina la ventaja del uso del sistema pluricanal en comparación con un sistema de correlación ordinario y mientras menos sea el valor de B_n el sistema funcionará de manera más efectiva.

El tiempo de integración T se determina por el tiempo de presencia del origen de la señal en una dirección de compensación de las antenas receptoras. El intervalo cuadrado de correlación $t_{c \text{ cuad}}$ se determina por los espectros de las señales y del ruido, y también por las frecuencias de los filtros de los canales receptores de las antenas.

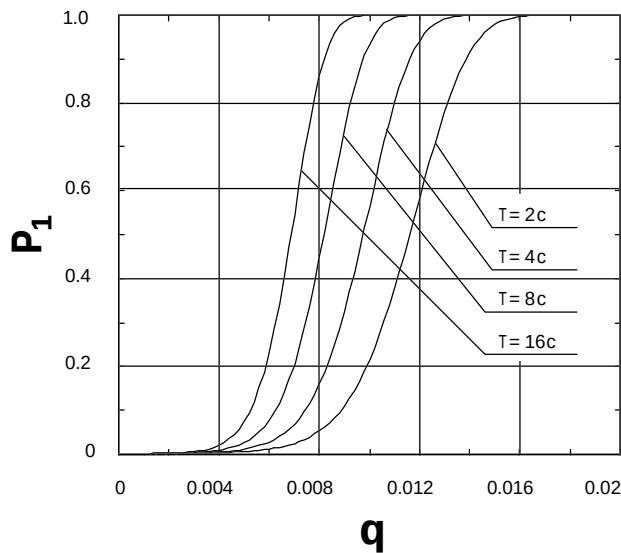
Caso de sistema de correlación con dos elementos receptores ($N=1$):

Si tenemos $N=1$ entonces $B_s=1, B_n=1$. En este caso, de acuerdo con (21), tendremos la expresión para la relación señal a ruido de la salida del integrador:

$$Q = \frac{q^2 R_{12}^s(t) T^{1/2}}{[2 t_{c \text{ cuad}} (2 q^4 + 2 q^2 + 1)]^{1/2}}. \quad (26)$$

Una expresión similar se obtuvo (V. bibliografía 1) para el caso de un espectro especial. Las expresiones para calcular la probabilidad de detección de la fuente de la señal son idénticas para el caso de un sistema pluricanal.

FIGURA 2. CARACTERÍSTICAS DE PROBABILIDAD DE LA DETECCIÓN DE LA FUENTE PUNTUAL; $P_0=10^{-3}$ ($q_0=3.09$); $B_n=0.01$; $B_s=1.0$; $R_{12}^s(t)=1.0$; $R_{12}^n(t)=0$; $t_{c\text{cuad}}=18.54 \cdot 10^{-6}s$; $T=2; 4; 8; 16s$.



$t_{c\text{cuad}}=18.54 \cdot 10^{-6}s$; $T=2; 4; 8; 16s$ se representan en la Figura 2.

Análisis de resultados

Las características de probabilidad que se representan en la Figura 2 permiten determinar los valores de la relación señal a ruido q y el tiempo de integración T que es necesario tener para detectar una fuente puntual con la probabilidad predeterminada P_1 y la probabilidad de alarma falsa $P_0=10^{-3}$. Las expresiones desarrolladas en este artículo permiten calcular las características de probabilidad para los sistemas de correlación pluricanal con otros parámetros del sistema receptor (cantidades: N , $P_0=P_0(q_0)$, T). Es necesario conside-

rar las siguientes cantidades especialmente para cada caso: B_n , B_s , $R_{12}^s(t)$, $t_{c\text{cuad}}$. Dichas cantidades, B_n , $R_{12}^s(t)$, $t_{c\text{cuad}}$ se obtienen por características de la fuente (espectro, prolongación en el espacio en caso de que la fuente no sea exactamente una fuente puntual). La cantidad B_n se determina por la distribución de los componentes del campo de ruido en el espacio y, en un caso común, B_n es la función del ángulo de compensación de las antenas receptoras. Es necesario determinar los valores de B_n para cada caso especial en el uso del sistema.

Conclusión

En el presente artículo consideramos un sistema de correlación donde cada elemento receptor es una antena con directividad. Consideramos el caso común en el que dos antenas discretas son idénticas y en el que cada antena receptora contiene N elementos. Tanto la construcción de las antenas como su directividad no se concretizan, al igual que las distribuciones de los ruidos en el espacio. Hemos considerado el problema en términos de los coeficientes de transferencia para las señales y el ruido. También hemos considerado el caso en el cual la señal y el ruido tienen los espectros idénticos. Las expresiones para el valor medio y la varianza de la función de crosscorrelación fueron obtenidas para el caso de la discorrelación del campo de ruido por medio de la distribución de las antenas en el espacio. En este artículo consideramos el ejemplo del cálculo de las características probabilísticas de la detección de la fuente puntual con la función de correlación con solo un máximo y en calidad de antenas receptoras consideramos las antenas lineales discretas con una distancia igual entre los elementos de la antena ①

Bibliografía

1. BENDAT S. Julius. *Principles and Application of Random Noise Theory*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1958.
2. DAVENPORT B. Wilbur; ROOT L. William. *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1958.
3. HADLEY G. *Probabilidad y Estadística. Una introducción a la teoría de la decisión*. México D.F., Fondo de Cultura Económica, 1979.
4. MORENO BONET, Alberto; JAUFFRED M., Francisco Javier. *Elementos de Probabilidad y Estadística*. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. México, 1969.